Mathématiques : rigueur ou efficacité ?

par Bernard Beauzamy
Professeur des Universités,
PDG, Société de Calcul Mathématique SA

Article publié (sous forme abrégée) dans le Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales, juillet 2001.

Le propre d'une science, par opposition à une croyance, est normalement son efficacité dans les faits. Construire un pont scientifiquement est normalement plus efficace que le construire par intuition ou par tradition : il sera plus solide, plus durable, moins coûteux…

Malheureusement, on ne sait pas construire un pont scientifiquement : on utilise des recettes, qui contiennent certes des formules, mais très largement empiriques ; c'est l'art des ingénieurs qui, par accumulation de connaissances et prise en compte d'erreurs, a permis petit à petit de les élaborer.

Contrairement à ce que croient les Universitaires, il y a très peu de domaines où les mathématiques, telles qu'elles sont enseignées aujourd'hui, interviennent réellement. Dire, comme je l'ai entendu, "dans un avion les mathématiques interviennent partout, sauf peut-être dans les sous-vêtements de l'équipage" est à la fois une mystification et une malhonnêteté. Assurément, il y a de l'aérodynamisme, du calcul des structures, des moteurs, etc, mais rien de tout cela ne vient d'une théorie mathématique : c'est l'art de l'ingénieur qui, le premier, a créé les concepts ; les mathématiciens n'ont fait que les formaliser. La mécanique quantique est née grâce aux physiciens ; c'est Von Neumann qui a ensuite développé le formalisme mathématique, qui s'est révélé fécond, parce que Von Neumann était bon mathématicien. De même, ce sont les physiciens qui ont créé les ondelettes, mais là au contraire, le formalisme développé ensuite par les mathématiciens est peu utile : les mathématiciens ont construit une théorie qui n'intéresse qu'eux autour d'un concept qu'on utilisait déjà largement avant eux et qu'ils n'ont pas fait progresser en pratique.

Je suis moi-même mathématicien professionnel, et je vis des mathématiques que je vends. Je suis donc au regret de dire que je ne connais pas un seul exemple où un concept mathématique ait précédé la théorie physique, puis l'appareil que l'on construit et que l'on utilise. Peut-être existe-t-il de tels exemples, mais ils sont marginaux et économiquement insignifiants. A l'inverse, je connais d'innombrables exemples, pris dans la vie de tous les jours, où les mathématiques peinent à décrire l'appareil, appareil qui fonctionne au quotidien et que chacun utilise : un avion, une automobile, une batterie, une lampe, etc, sont trop complexes pour être finement modélisés, et pour que l'on puisse prédire leur comportement par des équations. Personne, par exemple, ne sait dire combien une ampoule durera.

Pour nous, mathématiciens, l'état d'esprit devrait donc être à la modestie : essayons de comprendre et essayons d'aider, et non à l'arrogance, comme elle apparaît dans les formules "il y a des mathématiques partout", et "c'est l'honneur de l'esprit humain".

Un ingénieur, passé par une Grande Ecole, devrait donc utiliser son bagage mathématique à cela : essayer de comprendre et essayer d'aider. Cela repose sur l'analyse du besoin : quel outil est nécessaire pour décrire ce phénomène ? comment allons-nous le modéliser ?

Malheureusement, l'enseignement, à l'Université surtout, mais aussi dans les Classes préparatoires, privilégie le formalisme, baptisé pompeusement "rigueur", au détriment de l'efficacité. Les conséquences sont particulièrement nocives :

- Les élèves ne comprennent pas les concepts, parce qu'ils voient seulement le formalisme et jamais la mise en pratique ;

- Ils sont sélectionnés sur leur capacité à absorber ce formalisme, qui est très loin des vraies préoccupations d'un ingénieur ;

- Le résultat est l'élimination, par dégoût, d'un très grand nombre d'élèves et d'étudiants qui sont réfractaires à une telle présentation.

A l'Université, où j'ai enseigné pendant seize ans comme Professeur Titulaire, la présentation formelle de l'enseignement des mathématiques n'est jamais remise en question. C'est une conséquence du bourbakisme, sur lequel je reviendrai tout à l'heure, et du mode de fonctionnement des Universités, où les enseignants ne subissent aucune évaluation ni sanction. Je ne parle évidemment pas de sanction pénale ou pécuniaire, mais de la sanction par le succès ou l'échec des étudiants. Un enseignant en classe préparatoire subit la sanction des concours : il peut juger la qualité de son enseignement à l'aune du nombre de reçus dans les Ecoles, et on peut juger de la qualité d'une Ecole par l'embauche des étudiants à la sortie. Il me semble donc que les enseignants de classes préparatoires seront, plus que leurs collègues universitaires, sensibles aux questions que je soulève ici.

Traditionnellement, on présente non pas un outil mais une théorie : on parle par exemple de la théorie de l'intégration, de la théorie des groupes, etc. Une théorie est normalement un cadre conceptuel dans lequel un outil trouve sa place : ce cadre est bien fait, bien élaboré, avec juste les bons axiomes et les bonnes démonstrations. Le problème, avec cette façon de voir les choses, est que :

- L'outil n'est jamais présenté, parce que les enseignants ne le connaissent pas (ils ne connaissent que la théorie) ;

– Les étudiants ne comprennent pas la théorie, ne l'assimilent pas, ne la retiennent pas, parce qu'ils n'ont pas connaissance de l'outil.

Je vais donner un exemple pour faire comprendre mon propos : la théorie de l'intégration. Vous pouvez la faire à deux niveaux : intégrale de Riemann, intégrale de Lebesgue. Les étudiants n'aiment pas la première et ne comprennent pas la seconde. Et demandons-nous maintenant : à quoi sert la théorie de l'intégration ? Bien entendu, vous allez trouver quantité de réponses internes aux mathématiques, mais ces réponses, qui sont celles qu'on entend le plus souvent, ne sont pas satisfaisantes en soi : on ne justifie pas un objet par référence à cet objet. Si j'insiste un peu, vous me direz "le calcul des aires", mais cela fait un peu ringard : les Grecs le connaissaient déjà. Vous me direz aussi : "les fonctions de répartition en probabilités", mais cette réponse n'est pas complète, parce que trop abstraite : il faut ensuite expliquer à quoi servent les fonctions de répartition.

Il existe pourtant une réponse très simple à cette question, mais je ne l'ai jamais entendue pendant un cours universitaire de mathématiques : la théorie de l'intégration sert à fabriquer des centrales à inertie, utilisées à bord des avions. Dans une boîte close, vous ne pouvez enregistrer que des accélérations, et en intégrant deux fois vous savez où vous êtes, à tout instant, en l'absence de visibilité (à condition évidemment de savoir d'où on est parti !).

Or presque toutes les théories mathématiques, jusqu'à la dégénérescence Bourbachique, étaient nées d'un besoin, c'est à dire correspondent à un outil : annoncez l'outil au début de l'enseignement, et les élèves comprendront toute la théorie !

Le deuxième point essentiel est la confusion, savamment entretenue, entre formalisme et rigueur. La rigueur signifie : connaître le domaine d'application des outils que l'on utilise, savoir distinguer une série convergente d'une série divergente, etc : c'est tout à fait essentiel, et il faut militer pour une meilleure prise en compte de la rigueur chez les étudiants et les ingénieurs. La démonstration sert à cela : on a des hypothèses bien définies et, partant de ces hypothèses, on aboutit à la conclusion. Rappeler aux étudiants que les hypothèses servent à quelque chose, qu'on ne peut pas dériver ou intégrer n'importe quelle fonction, est une part essentielle de la formation.

Mais le formalisme est une chose tout à fait différente : cela consiste à développer, pour une théorie, et donc pour un outil, un cadre le plus conceptuel, le plus dépouillé possible. Par exemple, on peut intégrer une fonction continue sur un segment (c'est facile) ; on passe ensuite aux fonctions intégrables au sens de Lebesgue (c'est déjà plus difficile), et on continue avec les distributions. Ce formalisme-là est presque toujours inutile et même nuisible, parce qu'il s'oppose à la compréhension : le besoin initial a disparu. Je pense qu'il faut enseigner une théorie dans le cadre où ses applications seront les plus fréquentes et les plus naturelles : une fois que les étudiants l'auront comprise, on pourra (mais seulement des années plus tard et si cela se révèle nécessaire) l'étendre à un cadre plus général.

Je pense que si l'on respecte ces deux préceptes : partir du besoin et limiter la théorie au cadre véritablement utile, les mathématiques deviennent à la fois faciles et intéressantes. Elles ne sont actuellement ni l'un ni l'autre. J'ai vu récemment des étudiants de Deug 2ème année

(Physique-Chimie) à qui l'on enseignait les séries de Fourier, sans leur dire à quoi elles pouvaient servir et en insistant sur les problèmes de convergence…

Venons-en maintenant à ce que j'ai appelé plus haut la dégénérescence bourbachique, qui se manifeste par un développement du formalisme, exclusivement considéré comme une fin en soi. C'est Von Neumann qui, en 1947, a le premier mis en évidence le risque de dégénérescence lié au développement du formalisme : le bourbachisme est né de cette dégénérescence, et non l'inverse. Pour y remédier, Von Neumann préconisait l'introduction d'une certaine dose d'empirisme, c'est à dire le retour aux sources, mais il n'a pas été écouté. Cela fait maintenant trois générations que l'école mathématique universitaire française se consacre exclusivement au formalisme, trois générations d'enseignants-chercheurs, qui forment eux-mêmes des enseignants, sans avoir jamais eu le moindre contact avec un problème réel. L'enseignement académique naît, s'évalue et meurt au milieu de ce formalisme : il n'est donc pas étonnant qu'il ait peu d'adeptes. Il ne faut toutefois pas espérer qu'il sache se réformer : socialement, économiquement et même scientifiquement, il est mort depuis longtemps et donc n'est pas accessible à la discussion, pas plus que ne l'est une assemblée de moines réfugiée dans un couvent au sommet des Himalayas.

Mais restent deux problèmes majeurs : le premier est le vôtre et le second est le mien. Le premier, les professeurs de Classes Préparatoire le côtoient tous les jours : c'est celui de la formation des étudiants. J'ai expliqué plus haut les règles qui me paraissent nécessaires : elles diffèrent, par leur état d'esprit, de ce que les enseignants ont eux-mêmes appris. L'autre, c'est moi qui le côtoie tous les jours : l'insuffisance au quotidien de l'outil mathématique. Les problèmes les plus simples, les plus banals, ne sont pas résolus : tantôt on ne sait pas les formaliser, et lorsqu'on sait les formaliser, on ne sait pas les résoudre. Guider un véhicule, construire un pont, gérer un entrepôt, remplir un camion, etc, requièrent des mathématiques qui n'existent pas aujourd'hui et qu'il faudrait développer pour avoir une approche réellement scientifique. Peut-être les professeurs de Classes Préparatoires pourraient-ils expliquer ceci à leurs élèves, pour les motiver ? Leur expliquer que l'outil mathématique n'est pas mort, mais qu'il n'est pas encore né, qu'il ne se réduit en aucune façon aux pompeuses théories des universitaires et que les étudiants, devenus ingénieurs ou chercheurs, sont les bienvenus à essayer de le développer, si seulement ils veulent bien se "mettre les mains dans le cambouis".

Bernard Beauzamy